Adı Soyadı: 08.01.2020
Numarası

MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-I FİNAL SINAVI

1) $\left(x-\dfrac{2y}{x}+1\right)dx+dy=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

2) $e^x\left(2y^2+3\right)dy-\left(2xy+y\right)dx=0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3) $c^2x^2-2cy+4=0$ eğri ailesinin varsa zarfını bulunuz.

4) Bir Clairaut denklemi yazarak bu denklemin genel çözümünü ve varsa tekil çözümünü bulunuz.

5) $2y'\left(y-xy'\right)=1$ denklemi verilsin.

a) genel çözümünü bulunuz **b)** varsa tekil çözümünü bulunuz **c)** varsa zarfını bulunuz.

Not: Sadece 4 soru cevaplandırınız. Süre: 90 dakikadır. Başarılar. Dr. Öğr. Üyesi Fatma Hıra

Cevaplar

1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{x}-x-1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2}{x}y=-x-1$ lineer denklemdir.

$\lambda(x)=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=\dfrac{1}{x^2}$ olmak üzere genel çözüm

$y.\dfrac{1}{x^2}=\int\dfrac{-x-1}{x^2}dx+c \Rightarrow \dfrac{y}{x^2}=-\ln x+\dfrac{1}{x}+c$ olarak bulunur.

2) $e^x(2y^2+3)dy-(2xy+y)dx=0$

$e^x(2y^2+3)dy-y(2x+1)dx=0 \Rightarrow$ Denklem $\dfrac{e^{-x}}{y}$ ile çarpılırsa

$\dfrac{2y^2+3}{y}dy-e^{-x}(2x+1)dx=0$

$\Rightarrow \left(2y+\dfrac{3}{y}\right)dy=\left(2xe^{-x}+e^{-x}\right)dx$ şeklinde değişkenlerine ayrılabilir denklemdir.

Her iki tarafın integrali alınırsa

$y^2+3\ln y=-2e^{-x}(x+1)-e^{-x}+c$

$y^2+3\ln y=-e^{-x}(2x+3)+c$ genel çözümdür.

3) $g(x,y,c)=c^2x^2-2cy+4=0$

$\dfrac{\partial g}{\partial c}=2cx^2-2y=0$

$c=\dfrac{y}{x^2} \Rightarrow \left(\dfrac{y}{x^2}\right)^2x^2-2\left(\dfrac{y}{x^2}\right)y+4=0$

$\Rightarrow \dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{2y^2}{x^2}+4=0$

$\Rightarrow y^2=4x^2$

$\Rightarrow y=2x,\ y=-2x$ c tekil yerleri

Eğri ailesine karşılık gelen diferansiyel denklemini bulalım:

$c^2x^2-2cy+4=0$

$2c^2x-2cy'=0 \Rightarrow 2c(cx-y')=0$ $c\neq 0$ için

$c=\dfrac{y'}{x}$

$c=\dfrac{y'}{x}$ ise $\left(\dfrac{y'}{x}\right)^2x^2-2\left(\dfrac{y'}{x}\right)y+4=0 \Rightarrow x(y')^2-2yy'+4=0$ dif denk. elde edilir.

• $y=2x$ için $y'=2$ olup denklemde yazılırsa

$xy'^2-2yy'+4x = x.2^2-2.(2x).2+4x=0$ olup denklem sağlandığı

için $y=2x$ tekil çözümdür.

$y=2x$ için $c^2x^2-2cy+4=0 \Rightarrow c^2x^2-2c(2x)+4=0$

$\Rightarrow (cx-2)^2=0$

$\Rightarrow c=\frac{2}{x}$ çift katlı kök

olur. Buna göre $y=2x$ zarf eğrisidir.

• $y=-2x$ için $y'=-2$ olup denklemde yazılırsa

$xy'^2-2yy'+4x = x.(-2)^2-2(-2x)(-2)+4x=0$ şeklinde denklem

sağlandığı için $y=-2x$ tekil çözümdür.

$y=-2x$ için $c^2x^2-2cy+4=0 \Rightarrow c^2x^2-2c(-2x)+4=0$

$\Rightarrow c^2x^2+4cx+4=0$

$\Rightarrow (cx+2)^2=0$

$\Rightarrow c=-\frac{2}{x}$ çift katlı kök

olur. Buna göre $y=-2x$ zarf eğrisidir.

$\Rightarrow$ $c^2x^2-2cy+4=0$ parabol ailesinin zarfı $y=2x$, $y=-2x$ doğrularıdır.

4) $y=xp+f(p)$ formundaki denklemlere Clairaut denklemi
$y'=p$

denmektedir ve $f''(p)\neq 0$ ise tekil yeri tekil çözüm olmaktadır.

Buna göre

$y=xp+p^2$, $y=xp+p^2+1$, $y=xp+2p^2$; $y=xp+e^p$ ...

birer Clairaut denklemidir.

$y=xp+p^2$ için $p=c$ olup genel çözüm $y=cx+c^2$ şeklindedir

$f(p)=p^2 \Rightarrow f'(p)=2p$

$$\left.\begin{aligned} x&=-f'(p)\\ y&=-pf'(p)+f(p)\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x&=-2p\\ y&=-p.2p+p^2=-p^2\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y&=-\left(-\frac{x}{2}\right)^2\\ y&=-\frac{x^2}{4} \text{ tekil yeridir.}\end{aligned}$$

$f''(p)=2\neq 0$ olduğundan $y=-\frac{x^2}{4}$ tekil çözümdür.

⑤ $2y'(y-xy')=1$ $\quad y'=p$ için

$$2p(y-xp)=1 \Rightarrow y-xp=\frac{1}{2p}$$

$$\Rightarrow y = xp+\frac{1}{2p}$$ dup Clairaut

denklemidir. $f(p)=\frac{1}{2p}$ dır.

ⓐ $p=c$ için $\quad y=xc+\frac{1}{2c}$ genel çözümdür.

ⓑ $f'(p)=-\frac{1}{2p^2}$

$x=-f'(p)=\frac{1}{2p^2}$

$y=-p\,f'(p)+f(p)=-p\left(-\frac{1}{2p^2}\right)+\frac{1}{2p}=\frac{1}{p}$

$\left.\right\}$ $p=\frac{1}{y}$

$x=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{y^2}}$

$\overbrace{y^2=2x}^{}$ p tekilyeri

$f''(p)=\frac{1}{p^3}\neq 0$ olduğundan $y^2=2x$ tekil çözümdür

ⓒ $y^2=2x$ tekil çözümü için

$y=cx+\frac{1}{2c} \Rightarrow \quad 2c^2x+1-2cy=0$ genel çözümü

kullanılırsa $\quad c^2(y^2)+1-2cy=0$

$c^2y^2+1-2cy=0$

$(cy-1)^2=0$

$c=\frac{1}{y}$ çift katlı kök

olduğundan $y^2=2x$ zarftır.

$y=cx+\frac{1}{2c}$ veya $2c^2x+1-2cy=0$ doğru ailesinin

zarfı $y^2=2x$ parabolü olmaktadır.

Scanned by CamScanner